Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетно математическо състезание

Бургас, 25 март 2023 г.

Бургас, 2023 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. За всеки от корените на уравнението

$$\big(3x(x+10)-400\big)\big(x^2+6x+10\sqrt{6}-22\big)=0$$

определете (с обосновка) най-близкото до него цяло число.

Отговор. Най-близкото цяло число до $-5+\frac{5}{3}\sqrt{57}$ е $\mathbf{8}$, до $-5-\frac{5}{3}\sqrt{57}$ е $\mathbf{-18}$, до $2-\sqrt{6}$ е $\mathbf{0}$ и до $-8+\sqrt{6}$ е $\mathbf{-6}$.

Решение. Търсим корените на $3x^2+30x-400=0$ и на $x^2+6x+10\sqrt{6}-22=0$.
Първото уравнение има съкратена дискриминанта $225+1200=25(9+48)=25\cdot 57$ и корени $x_{1,2}=\frac{-15\pm5\sqrt{57}}{3}=-5\pm\frac{5}{3}\sqrt{57}$. Имаме $\frac{5}{3}\sqrt{57}\in(\frac{5}{3}\sqrt{49};\frac{5}{3}\sqrt{64})=(11\frac{2}{3};13\frac{1}{3})$, така че най-близкото цяло число е 12 или 13. За да преценим кое е от двете, ще проверим дали $\frac{5}{3}\sqrt{57}>12{,}5$. Това е така поради еквивалентното $\sqrt{57}>7{,}5$, което следва от $57>56{,}25$. Значи най-близкото цяло число до $\frac{5}{3}\sqrt{57}$ е 13. Съответно най-близкото цяло число до $x_1=-5+\frac{5}{3}\sqrt{57}$ е 8, а до $x_2=-5-\frac{5}{3}\sqrt{57}$ е -18.
При второто уравнение е по-удобно да отделим точен квадрат:

$$x^2+6x+9=25-10\sqrt{6}+6$$

$$(x+3)^2=(5-\sqrt{6})^2$$

$$x+3=\pm(5-\sqrt{6}),$$

откъдето намираме $x_3=2-\sqrt{6}$ и $x_4=-8+\sqrt{6}$.
Имаме $\sqrt{6}\in(2;3)$, така че най-близкото цяло число е 2 или 3. За да преценим кое е от двете, ще проверим дали $\sqrt{6}<2{,}5$. Това е така поради еквивалентното $6<6{,}25$. Значи най-близкото цяло число до $\sqrt{6}$ е 2. Съответно най-близкото цяло число до $x_3=2-\sqrt{6}$ е 0, а до $x_4=-8+\sqrt{6}$ е -6.
Оценяване. (6 точки) 1 т. за правилно пресмятане на $x_{1;2}$; 1 т. за правилно пресмятане на $x_{3;4}$ (не непременно в указания тук вид), по 1 т. за аргументирано определяне на най-близкото цяло число за всеки от корените.

Задача 8.2. Две окръжности k_1 и k_2 се пресичат в точки A и M. Точките B от k_1 и D от k_2 са такива, че всяка от тях е външна за другата окръжност и $\measuredangle BAD=80^\circ$. Точката C от правата AM е такава, че A и C са в различни полуравнини относно BD и M е между A и C. Отсечката BC пресича k_1 за втори път в точка X, а отсечката CD пресича k_2 за втори път в точка Y. Оказало се, че CD се допира до окръжността през точките C, X и M и че BC се допира до окръжността през точките C, Y и M. Да се намери големината на $\measuredangle BCD$.

Отговор. 80°.

Решение. От окръжността k_1 имаме $\measuredangle CXM=180^\circ-\measuredangle BXM=180^\circ-\frac{\widehat{BAM}}{2}=180^\circ-\frac{360^\circ-\widehat{BXM}}{2}=\frac{\widehat{BXM}}{2}=\measuredangle BAM$. Аналогично от k_2 следва $\measuredangle CYM=\measuredangle DAM$. От друга страна, периферните ъгли от допиранията дават $\measuredangle CXM = \measuredangle MCY$ и $\measuredangle XCM = \measuredangle CYM$. Така $\measuredangle MCY = \measuredangle BAM$ и $\measuredangle DAM = \measuredangle XCM$, значи от съображения за кръстни ъгли следва, че $ABCD$ е успоредник. Окончателно, $\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = 80°$.

Оценяване. (6 точки) По 1 т. за всяко от $\measuredangle CXM = \measuredangle BAM$, $\measuredangle CYM = \measuredangle DAM$, $\measuredangle CXM = \measuredangle MCY$ и $\measuredangle XCM = \measuredangle CYM$, 1 т. за извод, че $ABCD$ е успоредник и 1 т. за обоснован верен отговор.

Задача 8.3. Едно от числата m, n и p е равно на 1, друго на 2, а третото на 3. Да се намерят всички възможности за m, n и p, при които неравенството

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3 \geq \frac{x_1}{x_m} + \frac{x_2}{x_n} + \frac{x_3}{x_p}$$

е изпълнено за всички положителни реални числа x_1, x_2 и x_3.

Отговор. Всички шест тройки (m, n, p) са възможни.

Решение. Да положим $a = \frac{x_1}{x_2}$, $b = \frac{x_2}{x_3}$ и $c = \frac{x_3}{x_1}$, явно $abc = 1$. При $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$; $m = 2$, $n = 3$, $p = 1$ и $m = 3$, $n = 1$, $p = 2$ искаме $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3$, $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ и $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca$. Ще покажем, че всички тези са изпълнени. От неравенството между среднокубично и средноквадратично следва $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ и понеже $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$ от неравенството между средноаритметично и средногеометрично, получаваме $(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$, т.е. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$. Сега от $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ и $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a + b + c$ (последните две еквивалентни на $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$) следва исканото.
За тройките $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$ и $(3, 2, 1)$ е достатъчно да докажем, че $a^3 + \frac{1}{a^3c^3} + c^3 \geq 1 + c + \frac{1}{c}$ (аналогично се действа когато вдясно изразът е на a или b). От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме $a^3 + \frac{1}{a^3c^3} \geq \frac{2}{\sqrt{c^3}}$ и при $u = \sqrt{c} > 0$ остава да съобразим, че $\frac{2}{u^3} + u^6 \geq 1 + u^2 + \frac{1}{u^2}$ поради еквивалентното (напр. чрез схемата от Хорнер) $(u - 1)^2(u^7 + 2u^6 + 3u^5 + 4u^4 + 4u^3 + 4u^2 + 3u + 2) \geq 0$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за доказателство на $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, 2 т. за доказателство на $m = 2$, $n = 3$, $p = 1$ и 2 т. за доказателство на $m = 3$, $n = 1$, $p = 2$; 2 т. за доказателство на останалите тройки

Задача 8.4. В координатна система отначало е оцветена само точката $(1; 2023)$. Ако точката $(x; y)$ е оцветена, то може да се оцветят още точката $(x+1; y+1)$, както и точките $(x/n; y/n)$, за които n е едноцифрено и координатите им са цели числа. Също ако точките $(x; y)$ и $(y; z)$ са оцветени, може да се оцвети точката $(x; z)$. Намерете всички трицифрени y, за които точката $(20; y)$ може да бъде оцветена.

Отговор. 357 и 694.

Решение. В първоначално оцветената точка ординатата е по-голяма от абсцисата и разликата им е кратна на 337, а правилата гарантират, че това ще остане в сила и за всяка новооцветена точка. Следователно y може да е само $20 + 337 = 357$ или $20 + 2.337 = 694$.

И двете са възможни: $(1;2023) \to (3;2025) \to (1;675) \to (20;694)$ и $(1;2023) \to (6;2028) \to (1;338) \to (20;357)$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за получаване на $y = 357$; 1 т. за получаване на $y = 694$; 5 т. за доказателство, че други възможни няма.

Задача 9.1. Да се намерят всички реални числа m, за които двете пресечни точки с абсцисната ос на графиката на функцията

$$f(x) = x^2 + mx + m,$$

заедно с нейния връх образуват равностранен триъгълник.

Отговор. -2 и 6.

Решение. За пълнота ще анализираме общия случай, когато $f(x) = x^2 + mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.
Първи начин: Очевидно можем да разложим $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 < x_2$. Ако положим $x' = x + \frac{x_1+x_2}{2}$ можем да запишем $f(x)$ като $(x' - a)(x' + a) = x'^2 - a^2$, където $a = \frac{x_2-x_1}{2}$. Така ефективно "преместихме"(транслирахме) графиката на функцията симетрично на оста Oy. Триъгълникът, който разглеждаме е равнобедрен с основа с дължина $2a$ и височина $\|(0-a)(0+a)\| = a^2$. Да, но височината на равностранен триъгълник със страна $2a$ е $\sqrt{3}a$ (да се докаже!). Следователно имаме $a^2 = \sqrt{3}a$ или $a = \sqrt{3}$.
Всички търсени полиноми имат вида $f(x) = ((x + c) - \sqrt{3})((x + c) + \sqrt{3})$, където c е реална константа. Разкриваме скобите и получаваме $f(x) = x^2 + 2cx + c^2 - 3$. Така окончателно $(m, n) = (2c, c^2 - 3)$, където c е произволно реално число.
Втори начин: Да означим дискриминантата на квадратното уравнение чрез $D := m^2 - 4n$. Съществуването на две пресечни точки на графиката на f с абсцисната ос е еквивалентно на съществуване на два реални корена за квадратното уравнение, т.е., $D > 0$. Тъй като $x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{D}}{2}$, то страната на равностранния триъгълник е $|x_1 - x_2| = \sqrt{D}$. Върхът на параболата $f(x)$ е с координати $\Big((x_1 + x_2)/2, f((x_1 + x_2)/2)\Big)$, откъдето и височината в равностранния триъгълник е $-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. По формулите на Виет: $x_1 + x_2 = -m$, откъдето

$$-f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -f\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2 - 4n}{4} = \frac{D}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{D}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{D} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{3}.$$

Следователно $m^2 - 4n = D = 12$ и $(m, n) = (2c, c^2 - 3)$, където c е произволно реално число.
Сега да се върнем към конкретната задача. Условието $n = m$ е еквивалентно на $2c = c^2 - 3$, т.е., търсим корените на квадратното уравнение $c^2 - 2c - 3 = 0$, които са $c_1 = -1$ и $c_2 = 3$. Тогава, $m_1 = 2c_1 = -2$ и $m_2 = 2c_2 = 6$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за правилно изразяване на елементи на триъгълника (примерно равнобедреност, височина и страна), които позволяват проверка, че той е равностранен; 2 т. за правилно пресмятане на връзките между тях при равностранен триъгълник; по 1 т. за $m = \{-2, 6\}$.

Задача 9.2. Даден е триъгълник ABC ($AC \neq BC$) с ъглополовяща CL ($L \in AB$). Медианата през върха C пресича описаната около триъгълника окръжност Γ за втори път в точка D. Ако точка K е средата на дъгата $\widehat{ACB}$ от Γ, а точка P е симетричната на L относно допирателната към Γ в K, да се докаже, че D, L, C, P лежат на една окръжност.

Решение. Да означим с S средата на дъгата $\widehat{AB}$ в Γ, а с M – средата на AB. Знаем, че C, L, S и K, M, S са прави линии, т.е., KS е диаметър за Γ. От $\measuredangle LCK = \measuredangle SCK = 90^\circ = \measuredangle LMK$ следва, че четириъгълник $CLMK$ е вписан. Значи $\measuredangle LCM = \measuredangle LKM = \varphi$. От $LP \parallel KM$ и $KP = KL$, получаваме $\measuredangle KLP = \measuredangle KPL = \varphi$. Но от вписани ъгли имаме $\measuredangle DKS = \measuredangle DCS = \varphi$, откъдето $\measuredangle DKS = \measuredangle KPL$ и значи P, K, D лежат на една права. Накрая, от $\measuredangle LCD = \measuredangle LPD = \varphi$ заключаваме, че $DLCP$ е вписан.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $CLMK$ вписан; 3 т. за P, K, D колинеарни; 2 т. за довършване.

Задача 9.3. Да се намери най-големият общ делител на биномните коефициенти

$$\binom{2^p p}{1}, \binom{2^p p}{3}, \binom{2^p p}{5}, \dots, \binom{2^p p}{2^{p-1}p - 1}$$

където p е просто число.

Решение. Първо нека разгледаме $p = 2$. Тогава директно проверяваме че отговорът е 8. В останалата част от доказателството ще разглеждаме p – нечетно. Също така, нека отбележим, че $\binom{2^p p}{k} = \binom{2^p p}{2^p p - k}$, следователно търсеният най-голям общ делител d няма да се промени, ако разглеждаме всички нечетни биномни коефициенти. Имайки предвид това, ще използваме следните две тъждества:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

и

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Изваждайки и делейки на 2 получаваме:

$$2^{n-1} = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{2i+1}.$$

При $n = 2^p p$ това е точно сумата на разглежданите числа и значи d, който трябва да дели сумата делейки всяко от събираемите в нея, е степен на двойката: $d = 2^t$. От $\binom{2^p p}{1} = 2^p p$ знаем че $t \leq p$. Ще докажем, че $t = p$. Действително, съгласно тъждеството $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ за произволен биномен коефициент имаме

$$\binom{2^p p}{2l+1} = \frac{2^p p}{2l+1} \binom{2^p p - 1}{2l}.$$

Тъй като $\binom{2^p p}{2l+1}$ е цяло число, а $2l+1$ е нечетно, значи биномният коефициент се дели на 2^p за всяко $l = 1, 2, \ldots, 2^{p-1}p - 1$ и задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $p = 2$; 2 т. за намиране на сумата на числата (или друга линейна комбинация или функция, която може да се употреби по сходен начин); 2 т. за доказване че най-големият общ делител е степен на 2; 2 т. за отговор за нечетно p.

Задача 9.4. В един клас има 28 ученика, всеки от които харесва някои от останалите. При това, никоя двойка ученици не се харесват взаимно, т.е., ако Емил харесва Слави, то Слави не харесва Емил. Всеки 16 ученика, обаче, могат да се подредят в кръг така, щото всеки да харесва следващия. Да се докаже, че измежду всеки 17 ученика могат да се изберат 15, които също могат да се подредят в кръг така, щото всеки да харесва следващия.

Решение. Нека отбележим че всеки ученик харесва поне 13 съученика. Действително, ако харесва най-много 12, можем да премахнем тези 12 и останалите 16 няма да могат да се подредят в кръг. Аналогично, всеки бива харесван от поне 13 съученика.
Нека двойка ученици, никой от които не харесва другия да наричаме "вражда". Тъй като по условие няма взаимно харесване, то съучениците, които даден ученик харесва са непресичащо се множество с учениците, които го харесват, т.е., поне $13 + 13 = 26$ съученици са или харесвани или харесват даден ученик. Оттук, всеки ученик е в най-много $28 - 26 - 1 = 1$ вражда.
Да вземем 17 ученика. Съществува такъв, който не е във вражда с никого (не можем да разделим 17 на непресичащи се двойки). Да го наречем b. Да наредим останалите 16 в кръг според условието и да ги номерираме с a_1 до a_{16}. Всеки от този кръг или харесва b, или бива харесван от него. Нека a_1 харесва b. Ако b харесва a_4, значи цикълът $a_1, b, a_4 ... a_{16}$ изпълнява търсеното. Значи a_4 харесва b. Аналогично намираме че a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16}, a_3 и всички останали трябва да харесват b, за да няма цикъл с дължина 15. Следователно поне 16 ученика харесват b, откъдето той може да харесва най-много $28 - 1 - 16 = 11$. Това е противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за това, че всеки ученик харесва поне 13 съученика; 1 т. за това че всеки ученик бива харесван от поне 13 съученика; 2 т. за това, че всеки ученик е в най-много една вражда; 1 т. за това, че от всеки 17 има един, който не е във вражда с някой от останалите; 2 точки за довършване.

Коментар. Числата 28 и 16 не са от особено значение. Задачата работи с произволни числа от вида $4k-4$ и $2k$, където k не се дели на 3. Можем аналогично да докажем съществуването и на други подобни кръгове, в които всеки харесва следващия.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на a, за които системата

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5a + 1 \\ x + 2y + 3z &= 5a - 1 \\ x - y \qquad &= 2a + 2 \end{aligned}$$

има решение (x, y, z), за което числата x, y, z са две по две различни и в някакъв ред образуват геометрична прогресия.

Отговор. $a = 1/2, a = -1/4$.

Решение. От третото уравнение получаваме $x = y + 2a + 2$ и заместваме в първите две уравнения, откъдето $3y + z = a - 3$, $3y + 3z = 3a - 3$. Оттук $2z = 2a$, т.е. $z = a$. От предишните уравнения следва, че $y = -1, x = 2a + 1$.

За да бъдат $\{x, y, z\}$ в този ред в геометрична прогресия, трябва $y = qx, z = qx^2$ за някое q ($q \neq 0$ тъй като $y = -1$), или еквивалентно, $y^2 = xz$, тоест $2a^2 + a - 1 = 0$. Решенията на това уравнение са $a = -1, a = 1/2$. Директна проверка показва, че $a = -1$ води до константното решение $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$, което не удовлетворява условието на задачата. Така, единствено $a = -1/2$ е решение.

Аналогично, за да бъдат $\{y, x, z\}$ в този ред в геометрична прогресия то $x^2 = yz$, откъдето $(2a + 1)^2 + a = 0$ с решения $a = -1, a = -1/4$. Отново $a = -1$ не е решение, но $a = -1/4$ е.

Последно, за да бъдат $\{x, z, y\}$ в този ред в геометрична прогресия то $z^2 = yx$, което води до $a^2 + 2a + 1 = 0$ с двоен корен $a = -1$, което не е решение.

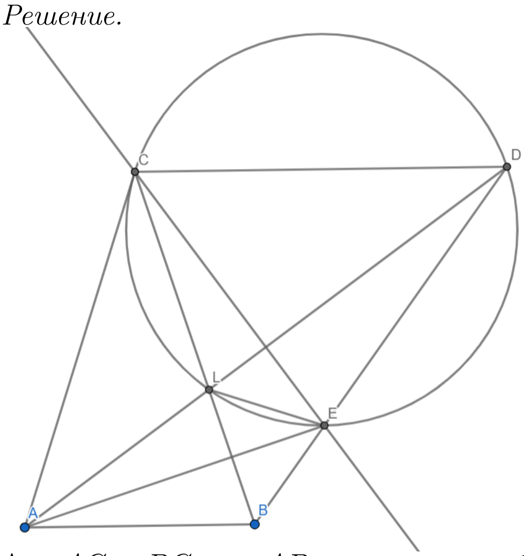
Оценяване. (6 точки) 2 т. за $x = 2a + 1, y = -1, z = a$, по 1 т. за решаването на всяко от трите квадратни уравнения за a и 1 т. за отстраняването на $a = -1$.

Задача 10.2. Равнобедреният триъгълник $\triangle ABC$ има ъгли $\angle BAC = \angle ABC = 72°$. Ъглополовящата AL пресича правата през C, успоредна на AB в точка D.

а) Да се докаже, че центърът E на описаната около $\triangle ADC$ окръжност лежи върху BD.

б) Да се докаже, че BE/BL е ирационално. Ако решението ви използва ирационалност на стойността на тригонометрична функция, трябва да докажете това!

Решение.



Лесно се получава, че $\angle BAD = \angle DAC = \angle ADC = 36°$, така че $\triangle ADC$ е равнобедрен и $BC = AC = CD$. Следователно, $\triangle BCD$ е равнобедрен с ъгли при B и C по $(180° - 72°)/2 = 54°$. Ако симетралата на AD пресича BD в точка E, то $AE = DE$, и трябва да докажем, че $CE = DE$. $\angle EDL = 54° - 36° = 18°$ и $\angle ECL = 108°/2 - 36° = 18°$, следователно $DCLE$ е вписан четириъгълник. $\angle ECD = 72° - \angle ECL = 54° = \angle EDC$, тоест $EC = ED$ и E е центърът на описаната около ADC окръжност.

Ако $AC = BC = a$, $AB = c$, то от подобните триъгълници ABL, ACB се вижда, че

$$\frac{c - a}{c} = \frac{c}{a},$$

тоест, след решаване на квадратно уравнение, $c/a = (\sqrt{5}-1)/2$. От $\triangle BEL \sim \triangle BCD$ и косинусовата теорема следва, че

$$\frac{BE}{a-c} = \frac{a}{BD} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a^2-2a^2\cos 72^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos 72^\circ}}.$$

Ако построим височината от C в $\triangle ABC$, забелязваме, че $2\cos 72^\circ = 2\frac{c/2}{a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, следователно

$$\frac{BE}{BL} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{5}/2-1/2}} = \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Това число наистина е ирационално, защото числителя е ирационален, а знаменателя – цял.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за а) и 4 т. за б). За а): 1 т. за доказване, че $CLED$ е вписан и 1т. за довършване. За б): 1 т. за намиране на a/c (или еквивалентно); 1т. за използване на $\triangle BEL \sim \triangle BCD$, 1т. за изчисляване на $\cos 72^\circ$ и 1т. за довършване.

Задача 10.3. Даден е изпъкнал 8-ъгълник $A = A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Ще наричаме *пълна триангулация* разбиването му на триъгълници посредтсвом вътрешно два по два непресичащи се диагонали.

При пълна триангулация T, дефинираме операцията *частична промяна*, изразяваща се в замяната на два от триъгълниците в T: $\triangle A_iA_jA_k$ и $\triangle A_iA_kA_l$ имащи обща страна диагонала A_iA_k, с триъгълниците $\triangle A_iA_jA_l$ и $\triangle A_jA_lA_k$ имащи обща страна диагонала A_jA_l.

Да се намери най-малкия брой частични промени, които гарантирано да позволяват преобразуването на пълната трианглуцаия T_1 до пълната триангулация T_2, независимо от избора на T_1 и T_2.

Отговор. 7.

Решение. Да означим минималния брой необходими частични промени с n. Първо, ще конструираме работеща стратегия при $n \leq 7$, а след това ще конструираме две пълни триангулации T_1 и T_2 на A, за които $n \geq 7$ (виж Фигура 1).
За начало, да отбележим, че всяка пълна триангулация T се състои от 6 триъгълника, респективно включва 5 диагонала. Наистина, строейки диагоналите от T последователно (без значение в какъв ред), ние всеки път разбиваме изпъкнал многоъгълник на два изпъкнали многоъгълника и значи сумата от ъглите на всички части преди и след разбиването съвпада, а броят части надвишава с единица броя построени диагонали. Така, че ако в края имаме k триъгълника, то

$$\sum \text{ъгли в осмоъгълника} = (8-2)\cdot 180 = 180\cdot k = \sum \text{ъгли във всички триъгълници}$$

и значи винаги имаме $k = 8-2 = 6$ триъгълника и $k-1 = 5$ използвани диагонали.

Нека сега разгледаме две произволни пълни триангулации T_1 и T_2 и означим множеството от диагоналите им (броейки кратностите!) с D_{12}. Имаме, че $|D_{12}| = 10$, като всеки диагонал има по два края измежду осемте върхове на A. Така, разполагаме с 20 края на диагонали и 8 върха. Но $20/8 = 2.5 > 2$, следователно при всеки избор на T_1 и T_2 съществува връх A_i, който е край на поне три от диагоналите в D_{12}.

Да наречем *i-централизирана* пълната триангулация на A, всичките 5 диагонала на която имат за край върха A_i. Нека я означим с $T(i)$. Ще покажем, че можем да преобразуваме T_1 до T_2, преминавайки междинно през $T(i)$ за не повече от 7 хода. За целта е достатъчно да покажем, че винаги можем да приложим частична промяна към пълна триангулация $T \neq T(i)$, чиито нов диагонал има за край върха A_i. Наистина, щом $T \neq T(i)$, значи съществува диагонал A_iA_j, който не е част от диагоналите на T. Съгласно условието, следва, че съществува диагонал на T, който се пресича с A_iA_j. Това е еквивалентно на съществуване на триъгълник $A_iA_kA_l$ в T, където A_kA_l също е диагонал. Но като диагонал, A_kA_l е страна в два от триъгълниците на T, т.е., съществува връх $A_{j'}$ (който може, но не е задължително да съвпада с A_j), такъв че $\triangle A_kA_lA_{j'} \in T$. В такъв случай можем да приложим частична промяна в T за четириъгълник $A_iA_kA_lA_{j'}$, заменяйки диагонала A_kA_l с диагонала $A_iA_{j'}$.

Показахме, че можем от всяка от двете пълни триангулации T_1 и T_2 да стигнем до $T(i)$ като на всеки ход добавяме нов диагонал с край A_i за сметка на такъв, който не е свързан с този връх. Но лесно се съобразява, че операцията частична промяна е двупосочна и, тъй като няма нужда да я прилагаме към диагоналите от D_{12} с край A_i, то максималния брой ходове за които да стигнем от T_1 до T_2 през $T(i)$ е

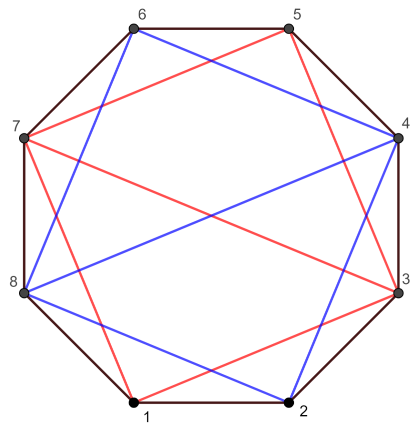
$$n = |D_{12}| - \#\text{ диагонали с край } A_i \leq 10 - 3 = 7.$$

Следователно $n \leq 7$.

Нека сега разгледаме пълните триангулации от Фиг. 1. Всичките диагонали в T_1 имат за краища върхове с нечетни индекси, докато всичките диагонали от T_2 имат за краища върхове с четни индекси.

Да означим с m минималния брой частични промени за трансформирането на T_1 в T_2. Всички четириъгълници в T_1, образувани при слепване на два триъгълника с обща страна имат за върхове или 4 нечетни или 3 нечетни и само един четен индекс. Аналогично, всички четириъгълници в T_2, образувани при слепване на два триъгълника с обща страна имат за върхове или 4 четни или 3 четни и само един нечетен индекс. Следователно не съществува частична промяна, която директно да смени диагонал от T_1 в диагонал от T_2. И тъй като двете триангулации нямат общ диагонал, то $m \geq 1 + 5 = 6$. При това $m = 6$ е единствено възможно, ако на първи ход преобразуваме диагонал от T_1 в "междинен диагонал" d с краища с четен и нечетен индекс и същия този диагонал d на последен ход преобразуваме в диагонал от T_2, докато на всички останали ходове преобразуваме директно диагонал от T_1 в диагонал от T_2.

Поради симетрия, без ограничение на общността можем да смятаме, че междинния диагонал е $d = A_3A_6$, получен при частична промяна спрямо диагонал A_5A_7. Ако допуснем, че $m = 6$, то на втори ход трябва да преобразуваме диагонал от T_1 в такъв от T_2, което е



Фигура 1: Пример за необходими 7 частични промени: T_1 – червените диагонали; T_2 – сините диагонали.

възможно само при частичната промяна на диагонал A_3A_5 в диагонал A_4A_6. Директна проверка показва, че на трети ход такава директна промяна не е възможна и значи $m > 6$, т.е., $m \geq 7$. От друга страна, съгласно алгоритъма от първата част на решението, частичните промени

$$A_7A_5 \to A_3A_6; \quad A_1A_7 \to A_3A_8; \quad A_3A_1 \to A_2A_8; \quad A_3A_5 \to A_4A_6;$$

$$A_3A_7 \to A_6A_8; \quad A_3A_6 \to A_4A_8; \quad A_3A_8 \to A_2A_4$$

дават стратегия с $m = 7$. Окончателно, $n = 7$.

Оценяване. (7 точки) по 3т. за $n \leq 7$ и $m \geq 7$; 1т. за отговор.

Задача 10.4. Да се намерят всички естествени числа n, за които съществува естествено число m и прости числа $1 < p < q$, такива че p и q са делители на $n^m + 1$, а $q - p$ е делител на m.

Отговор. Всички нечетни числа $n > 1$.

Решение. При $n = 1$, получаваме $n^m + 1 = 2$ за всяко m, което никога няма два различни прости делителя. Следователно $n = 1$ не води до решение.

Да допуснем първо, че n е четно число. Ако p е делител на $n^m + 1$ за някакво $m \in \mathbb{N}$, то имаме, че $n^{2m} \equiv 1 \pmod{p}$ и $n^m \equiv -1 \pmod{p}$, т.е., ако k е показателя на n по модул p (p е нечетно), то $k \mid 2m$, но $k \nmid m$. С други думи, ако $m = 2^s \cdot \ell$, където ℓ – нечетно, то $2^{s+1} \parallel k$. Но от малката теорема на Ферма $k \mid p-1$, следователно $2^{s+1} \mid p-1$. Аналогично, $2^{s+1} \mid q-1$ за всеки друг прост делител на $n^m + 1$ и значи

$$2^{s+1} \mid (q-1) - (p-1) = q - p.$$

Противоречие с $q - p \mid m = 2^s \cdot \ell$.

Нека сега n е нечетно, $n > 1$. Очевидно $2 \mid n^m + 1$ за всяко $m \in \mathbb{N}$. Избираме $p = 2$. Ако $n+1$ не е степен на двойката, избираме q да е нечетен прост делител на $n+1$, а $m = q-p = q-2$. Тъй като m е нечетно, то $q \mid (n+1) \mid n^m + 1$ и по-построение е ясно, че $q - p = m \mid m$.
Ако $n > 1$ е нечетно, но $n+1$ е степен на двойката, то n^2+1 – не е, защото не се дели на 4. Тогава избираме отново $p = 2$, q да е нечетен делител на n^2+1, а $m = 2(q-2)$. Аналогично,

$$q \mid n^2 + 1 \mid n^m + 1 \qquad \text{и} \qquad q - p = q - 2 = m/2 \mid m.$$

Всички случаи са изчерпани.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $n = 1$; 2 т. за n – четно; 2 т. за $n > 1$ – нечетно, но $n+1$ степен на двойката; 2 т. за $n > 1$ – нечетно и $n+1$ имащ нечетен прост делител.

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a за които уравнението

$$3 \cdot 3^{\cos 2x} - (a-5) \cdot 3^{\cos^2 2x} = 7$$

има решение.

Решение. Да положим $b = a - 5$ и $t = \cos 2x \in [-1, 1]$. Уравнението добива вида $3^{t+1} - 3^{t^2} b = 7$, откъдето $b = \frac{3^{t+1}-7}{3^{t^2}}$. Да разгледаме непрекъснатата и диференцируема функция

$$f(t) = \frac{3^{t+1} - 7}{3^{t^2}},\ t \in [-1, 1]$$

Имаме, че $f(-1) = -\frac{1}{2}, f(1) = \frac{2}{3}$, и

$$f'(t) = \frac{3^{t+1} - 2(3^{t+1} - 7)t}{3^{t^2}} \ln 3$$

Тъй като $3^{t^2} > 0, \ln 3 > 0$, знакът на производната се определя от израза

$$g(t) = 3^{t+1} - 2(3^{t+1} - 7)t = 3^{t+1}(1 - 2t) + 14t.$$

При $t = 1/2$, $g(t) = 7$. Ако $t \neq 1/2$, $g(t) = 0$ тогава и само тогава, когато

$$3^{t+1} = \frac{14t}{2t-1} = \frac{7}{2t-1} + 7$$

В интервала $-1 \leq t < 1/2$, лявата страна строго расте от 1 до $3\sqrt{3}$, а дясната страна строго намалява от $\frac{14}{3}$ до $-\infty$, откъдето има точно едно решение $t_0 \in [-1, 1/2)$ на $f'(t) = 0$ в този интервал, като при това от тези оценки виждаме, че това решение е локален минимум на f. В интервала $1/2 < t \leq 1$, лявата страна строго расте от $3\sqrt{3}$ до 9, а дясната строго намалява от ∞ до $14 > 9$, откъдето в този интервал $g(t) = 0$ няма решения.
Оттук виждаме, че в интервала $[-1, 1]$, $f(t)$ има минимална стойност $f(t_0)$ и максимална стойност $2/3$. Така търсените стойности за a са $a \in [5 + f(t_0), 17/3]$.
Забележка. $t_0 \approx -0.24$ и $f(t_0) \approx -4.4$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждане на f и подхода за търсене на минималната и максималната стойност; 1 т. за изчисляване на производната на f; 2 т. за долна оценка на a; 2 т. за горната оценка на a.

Задача 11.2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Точка E върху лъча $DA^{\rightarrow}$ е такава, че $\measuredangle ABC = 2\measuredangle EBD$. Да се докаже, че

$$DE = \frac{AC.BD}{AB + BC}.$$

Решение. Нека $\measuredangle EBD = \varphi$, $\measuredangle ABC = 2\varphi$ и точка P е върху правата AB така, че $BP = BC$ и B е между A и P. Тогава $\triangle BPC$ е равнобедрен и $\measuredangle BPC = \measuredangle BCP = \dfrac{1}{2}\measuredangle ABC = \varphi$. Тъй като $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$, то

$$\measuredangle DEB + \measuredangle ACP = \measuredangle DEB + \measuredangle ACB + \varphi = \measuredangle DEB + \measuredangle ADB + \varphi = 180^\circ.$$

От синусовата теорема за $\triangle APC$ и $\triangle EBD$ получаваме:

$$\frac{AB + BC}{AC} = \frac{\sin\measuredangle ACP}{\sin\varphi} = \frac{\sin\measuredangle DEB}{\sin\varphi} = \frac{BD}{DE},$$

което е еквивалентно на равенството от условието.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за построяване на точката P; 2 т. за $\measuredangle DEB + \measuredangle ACP = 180^\circ$; по 1 т. за прилагане на синусовата теорема за $\triangle APC$ и $\triangle BED$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Естествено число b се нарича *хубаво*, ако съществува редица от цели числа

$$1 = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2023} = b,$$

за която $|a_{i+1} - a_i| = 2^i$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, 2022$.
Да се намери броят на хубавите числа.
Отговор. 2^{2021}
Решение. От условието следва, че

$$b = 1 \pm 2^1 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \cdots \pm 2^{2021} \pm 2^{2022}.$$

От това равенство следва, че най-голямото хубаво число е

$$b \leq 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2023} - 1,$$

като освен това b е от вида $4k + 3$. Ще докажем, че хубавите числа са всички естествени числа от вида $4k + 3$, които са по-малки или равни на $2^{2023} - 1$. Техният брой е 2^{2021}.
Нека $b = 4k + 3$, $b \leq 2^{2023} - 1$ и да разгледаме двоичния запис $b = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, където $a_1 = a_0 = 1$ и $n \leq 2022$. Ако $n < 2022$ допълваме отляво с необходимия брой нули и така може да считаме, че $n = 2022$, като е възможно $a_n = 0$.

Ще покажем как от двоичния запис на b можем да определим $\varepsilon_i = \pm 1$ пред съответните степени на 2 в

$$b = 1 + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_2 2^2 + \varepsilon_3 2^3 + \cdots + \varepsilon_{2021} 2^{2021} + \varepsilon_{2022} 2^{2022}. \tag{1}$$

Ако $a_2 = 1$, то избираме $\varepsilon_1 = 1$. Ако $a_2 = 0$ нека $a_i = a_{i-1} = \cdots = a_2 = 0$, като или $a_{i+1} = 1$ или $i = n$. Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{i-1} = -1$ и $\varepsilon_i = 1$. Тогава

$$2^i - 2^{i-1} - \cdots - 2^2 - 2 = 2$$

Ако $i = n$ сме избрали всички 2022 коефициента, а ако $a_{i+1} = 1$ повтаряме горната процедура, т.е.: при $a_{i+2} = 1$ или $i + 1 = n$ избираме $\varepsilon_n = 1$, а при блок от нули избираме съответните коефициенти от ε_{i+1} до коефициентът съответстващ на предпоследната нула да са -1, а коефициентът съответстващ на последната нула да е равен на $+1$.
По този начин ще определим всички коефициенти и равенство (1) ще бъде вярно.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на най-голямото хубаво число; 1 т. за наблюдението, че хубавите числа са от вида $4k + 3$; 1 т. за идея за определяне на коефициентите в (1) от двоичния вид на хубаво число; 1 т. за наблюдението, че ход на дясно се определя от произволен брой ходове наляво, последвани от един ход надясно; 3 т. за правилно определяне на коефициентите в (1) от двоичния вид на числото.

Задача 11.4. В една държава има 2023 града, някои от които са съединени с директни пътища, като всеки път е с дължина 10 километра. За всеки два града съществува единствен начин да се стигне от единия град до другия, като се минава по тези пътища.
Най-дългият път между два града е с дължина $20n$ километра.
Един град се нарича второстепенен, ако от него излизат не повече от 6 пътя. Да се намери най-малката стойност на n, ако в тази държава няма град свързан с директен път с 6 или повече второстепенни града.

Решение. Разглеждаме граф с върхове градовете и ребра пътищата. Тъй като между всеки два града има единствен път, то този граф е дърво. Най-дългият път има $2n$ ребра и следователно има $2n+1$ града и нека средния от тези градове е A. Да разгледаме градовете и пътищата като дърво с корен град A. След корена в това дърво има n нива.
Нека в дървото няма връх, свързан с 6 или повече второстепенни върхове. Всички върхове от последното n-то ниво са листа и следователно са второстепенни. Тогава всеки връх от предпоследното $n-1$-во ниво е свързан с не повече от 5 листа. Но тогава и върховете от предпоследното ниво са второстепенни (защото имат само още едно ребро към връх от $n-2$-то ниво). Аналогично, всеки връх от следващото $n-2$-во ниво е свъран с не повече от 5 върха от върховете от $n-1$-то ниво и следователно всички върхове от $n-2$-то ниво са второстепенни. Продължавайки по този начин получаваме, че всички върхове са второстепенни.
Следователно всеки връх има степен най-много 5. Тогава от корена излизат най-много 5 ребра, т.е. на първо ниво има най-много 5 върха. От всеки връх от първо ниво излизат най-много 4 ребра към второ ниво, т.е. на второ ниво има най-много $5.4 = 20$ върха; аналогично

на трето ниво има най-много 5.4^2 върха; на четвърто ниво има най-много 5.4^3 върха и т.н. Върховете са най-много

$$V_n = 1 + 5(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1}).$$

Търсим най-малкото n, за което този брой е по-голям или равен на 2023. Тъй като $V_5 = 1706$ и $V_6 > 2023$, то търсеното n е 6.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за разглеждане на дървото с корен точка A; 1 т. за доказване, че това дърво има n нива; 2 т. за доказване, че всички върхове са второстепенни; 1 т. за преброяване на максималния брой върхове; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 12.1. Дадена е функцията $f(x) = x^3 + 6ax^2 + 9a^2x + 3a^2$, където $a \in \mathbb{N}$ е параметър. Да се докаже, че за всички стойности на параметъра a уравнението $f(x) = 0$ има три различни реални корена.

Решение. Нека вместо за $a \in \mathbb{N}$ да разглеждаме функцията $f(x)$ за всяко $a \in \mathbb{R}$. Производната $f'(x) = 3(x^2 + 4ax + 3a^2)$ се анулира в точките $x_1 = -3a$ и $x_2 = -a$, които са и точки на локален екстремум за $f(x)$. Така уравнението $f(x) = x^3 + 6ax^2 + 9a^2x + 3a^2 = 0$ ще има три различни реални корена точно когато изразът $A = f(-3a)f(-a) < 0$.
Имаме

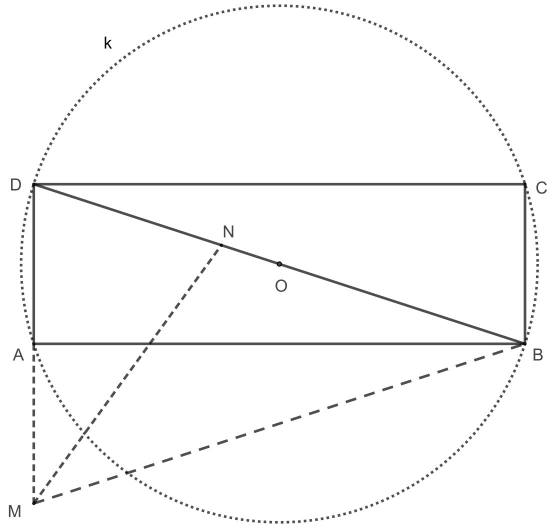
$$\begin{aligned} A &= \left((-3a)^3 + 6a(-3a)^2 + 9a^2(-3a) + 3a^2\right)\left((-a)^3 + 6a(-a)^2 + 9a^2(-a) + 3a^2\right) \\ &= (-27a^3 + 54a^3 - 27a^3 + 3a^2)(-a^3 + 6a^3 - 9a^3 + 3a^2) = 3a^4(-4a + 3) < 0, \end{aligned}$$

точно когато $a > \dfrac{3}{4}$. Следователно за всяко $a \in \mathbb{N}$ е в сила $A < 0$, т.е. уравнението $f(x) = x^3 + 6ax^2 + 9a^2x + 3a^2 = 0$ има три различни реални корена за всяка естествена стойност на параметъра.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за намиране на производната; 1 т. за намиране на точките на локален екстремум; 2 т. за получаване на условието $A = f(-3a)f(-a) < 0$; 1 т. за достигане до $a > \dfrac{3}{4}$; 1 т. за окончателен отговор.

Задача 12.2. В окръжност k с радиус $R = 1$ е вписан успоредник $ABCD$, така че за мерките на дъгите $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ имаме $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} = 4 : 1$. Да се намери периметърът P_{ABCD} на успоредника.
Отговор. $P_{ABCD} = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Решение. Нека означим страните на успоредника съответно с a и b $\Big(AB = CD = a,\ BC = DA = b\Big)$. Понеже успоредникът $ABCD$ е вписан в окръжността k, то той е правоъгълник с диагонали $AC = BD = 2R = 2$. Така за мерките на дъгите $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ имаме $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} = 4 : 1$ и $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 180^\circ$, следователно $\overset{\frown}{AB} = 144^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = 36^\circ$. Така за вписания ъгъл $\sphericalangle ADB$ е изпълнено $\sphericalangle ADB = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 72^\circ$.



Фигура 2: Чертеж към задача 12.2

Нека точката M е симетричната на D спрямо точката A, а MN е ълополовящата на $\sphericalangle BMD$ $\Big(N \in DB\Big)$ както е показано на чертежа. Тогава триъгълниците NDM, MBN и DMB са равнобедрени и $DM = MN = NB = 2b$, $\sphericalangle DMN = \sphericalangle BMN = \sphericalangle DBM = 36°$.
Следователно имаме, че $\triangle DMB \sim \triangle DNM$ и $DN = BD - BN = 2 - 2b$, т.е. $\dfrac{DN}{DM} = \dfrac{DM}{DB}$ или $\dfrac{2-2b}{2b} = \dfrac{2b}{2}$, т.е. $b^2 + b - 1 = 0$ или $b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, понеже $b > 0$.

Сега от теоремата на Питагор за $\triangle ABD$ имаме $a^2 + b^2 = 2^2$ или $a^2 = 2^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, т.е. $a^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$, откъдето $a = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} > 0$.
Така окончателно получаваме $P_{ABCD} = 2(a+b) = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{10+2\sqrt{5}}$.
Оценяване. (6 точки) 1 т. за обосновка на конструкцията и намиране на $\sphericalangle ADB = 72°$; 2 т. за подходящо допълнително построение $\Big($ако са използвани наготово стойности за тригонометрични функции на ъглите в $\triangle ABD$, то точките не се присъждат$\Big)$; 2 т. за намиране на едната страна на правоъгълника; 1 т. за намиране на другата страна и окончателен отговор.

Задача 12.3. Даден е алгебричен полином $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ от степен

m с цели коефициенти и положителен старши коефициент ($a_i \in \mathbb{Z}$ за $i = 0, 1, \dots m$ и $a_0 > 0$). Едно естествено число n се нарича *удобно за полинома* $f(x)$, ако съществува естествено число k_n, такова че $n! + 1 = \big(f(n)\big)^{k_n}$. Да се докаже, че за полинома $f(x)$ съществуват краен брой удобни числа.

Решение. Допускаме противното, т.е. съществува полином $\widetilde{f}(x)$ от степен $\widetilde{m}$ с цели коефициенти и положителен старши коефициент, който притежава безбройно много удобни числа.

Нека да означим с S множеството от удобните за $\widetilde{f}(x)$ числа, т.е.

$$S = \left\{ s \in \mathbb{N} : s! + 1 = \big(\widetilde{f}(s)\big)^{k_s}, \text{за някое } k_s \in \mathbb{N} \right\}.$$

За всяко естествено число a с $v_2(a)$ ще означаваме най-голямото цяло число x, за което $2^x | a$. Така за всяко $n \in S$ можем да запишем числото k_n във вида $k_n = 2^{a_n} b_n$, където $a_n = v_2(k_n)$, а b_n е нечетно. Тогава да отбележим, че за всяко $n \in S$, $n \geqq 2$ числото $\widetilde{f}(n)$ е нечетно и

$$\begin{aligned} v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{k_n} - 1\right) &= v_2\left(\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2b_n} - 1\right)\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2b_n} + 1\right) \cdots \left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2^{a_n - 1} b_n} + 1\right)\right) = \\ &= v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2b_n} - 1\right) + a_n - 1, \end{aligned}$$

защото всички множители освен първия са от вида $x^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ за нечетно x. Още повече

$$\begin{aligned} v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2b_n} - 1\right) &= v_2\left(\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1\right)\left(1 + \big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} + \big(\widetilde{f}(n)\big)^{4} + \dots + \big(\widetilde{f}(n)\big)^{2(b_n - 1)}\right)\right) = \\ &= v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1\right), \end{aligned}$$

защото вторият множител е сумата на нечетен брой нечетни числа.

Така получихме, че $v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{k_n} - 1\right) = v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1\right) + a_n - 1$. От друга страна за всяко $n \in S$, $n \geqq 2$ имаме, че $v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{k_n} - 1\right) = v_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \cdots$.

Нека s_n е максималното естествено число, за което $2^{s_n} \leqq n$. Следователно имаме, че $2^{s_n + 1} > n$ и също така

$$v_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^{s_n}} \right\rfloor \geq \frac{n}{2} - 1 + \dots + \frac{n}{2^{s_n}} - 1.$$

Значи, $v_2(n!) \geqq n - \dfrac{n}{2^{s_n}} - s_n > n - 2 - s_n$ (защото $n/2^{s_n} < 2$).

Така получаваме, че $v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1\right) + a_n - 1 > n - 2 - s_n$, но последното означава, че $a_n > n - 1 - s_n - v_2\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1\right)$, т.е. $k_n \geqq 2^{a_n} \geqq \dfrac{2^{n-1}}{n\left(\big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1\right)}$, защото $2^{s_n} < n$ и $2^{v_2\left(\left(\widetilde{f}(n)\right)^{2} - 1\right)} \leqq \big(\widetilde{f}(n)\big)^{2} - 1$.

Тогава за всички достатъчно големи n ще имаме $k_n > 2n$ и $\widetilde{f}(n) > \dfrac{n}{2}$, понеже $\widetilde{f}(x)$ е полином с цели коефициенти и положителен старши коефициент.

Но това означава, че $\big(f(n)\big)^{k_n} > \left(\dfrac{n}{2}\right)^{2n} = \left(\dfrac{n^2}{4}\right)^{n} > n^n + 1 > n! + 1$ за всички достатъчно големи n, т.е. достигаме до противоречие с допускането, че S е безкрайно.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за формулиране на обратното твърдение; 4 т. за намиране на долна граница за k_n при големи n; 1 т. за намиране на долна граница за $\widetilde{f}(n)$ при големи n; 1 т. за достигане до противоречие.

Задача 12.4. Дадени са множество A с n елемента и естествени числа k и m, за които $4 \leqq k < n$ и $m \leqq \min\left\{k-3, \dfrac{n}{2}\right\}$. Нека $A_1, \dots, A_l$ са подмножества на множеството A, такива че $|A_i| = k$ за всяко $i = 1, 2, \dots, l$ и $|A_i \cap A_j| \leqq m$ за $i \neq j$. Да се докаже, че съществува подмножество B на A с поне $\left(\sqrt[m+1]{n} + m\right)$ елемента, което не съдържа нито едно от множествата $A_1, A_2, \dots, A_l$.

Решение. Нека B е подмножеството на A, с максимален брой елементи, което не съдържа нито едно от множествата $A_1, A_2, \dots, A_l$. Тогава за всяко $x \in A \setminus B$ имаме, че съществува индекс $i(x)$, за който $A_{i(x)} \subseteq (B \cup \{x\})$ и означаваме с C_x множеството $A_{i(x)} \setminus \{x\}$.
Така имаме, че за всяко $x \in A \setminus B$, множеството C_x е $(k-1)-$елементно подмножество на B и $|C_x \cap C_y| \leqq |A_{i(x)} \cap A_{i(y)}| \leqq m$, за $x \neq y$. Да забележим, че всяко такова подмножество съдържа $\dbinom{k-1}{m+1}$ различни $(m+1)-$елементни подмножества и че условието $|C_x \cap C_y| \leqq m$ означава, че всяко $(m+1)-$елементно подмножество на B се среща в най-много едно C_x.
Понеже $|A \setminus B| = n - M$, където $M = |B|$, то получаваме, че $(n-M)\dbinom{k-1}{m+1} \leq \dbinom{M}{m+1}$, т.е.

$$n - M \leqq \frac{M(M-1)\cdots(M-m)}{(k-1)(k-2)\cdots(k-m-1)} \leqq \left(\frac{M-m}{k-m-1}\right)^{m+1} \text{ или } \left(\frac{M-m}{k-m-1}\right)^{m+1} + M \geqq n.$$

Да забележим, че функцията $f(x) = \left(\dfrac{x-m}{k-m-1}\right)^{m+1} + x$ е растяща функция на x за $x > m$ и освен това $f(M) \geqq n$.
Сега ще оценим стойноста $f(\sqrt[m+1]{n} + m) = \dfrac{n}{(k-m-1)^{m+1}} + \sqrt[m+1]{n} + m$.
По условие имаме $1 \leqq m < k-3$, т.е. $k-m-1 > 2$ и за първото събираемо е в сила оценката $\dfrac{n}{(k-m-1)^{m+1}} \leqq \dfrac{n}{2^{m+1}}$, а понеже функцията n^x растяща по x, то при $m \geqq 2$ получаваме $f(\sqrt[m+1]{n} + m) = \dfrac{n}{(k-m-1)^{m+1}} + \sqrt[m+1]{n} + m \leqq \dfrac{n}{2^3} + \sqrt[3]{n} + m$.

В сила са следните неравенства $m \leqq \dfrac{n}{2}$ $\big($което е изпълнено по условие$\big)$ и $\dfrac{3n}{8} \geqq \sqrt[3]{n}$ $\Big($което е изпълнено понеже $n^2 \geqq \left(\dfrac{8}{3}\right)^3$ за $n \geqq 5\Big)$. Така получаваме, че за $m \geqq 2$ е изпълнено неравенството $f(\sqrt[m+1]{n} + m) \leqq n$.
За $m = 1$ понеже $n \geqq 4$, то е в сила неравенството $\dfrac{3n}{4} - 1 \geqq \sqrt{n}$, т.е. имаме $f(\sqrt[1+1]{n} + 1) \leqq$

$\frac{n}{4}+\sqrt{n}+1 \leqq n$.

Така получихме, че f е растяща и $f(\sqrt[m+1]{n}+m) \leqq n \leqq f(M)$, следователно $M > \sqrt[m+1]{n}+m$, т.е. множеството B има поне $\sqrt[m+1]{n}+m$ елемента и не съдържа нито едно от множествата $A_1, A_2, \ldots, A_l$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за конструиране на подходящо множеството; 4 т. за доказване, че мощността на множеството е поне $\sqrt[m+1]{n}+m$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1, 9.3, 9.4 – Константин Делчев; 9.2, 10.4 – Александър Иванов; 10.1, 10.2 – Милен Иванов; 10.3 – Станислав Харизанов; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2 – Веселин Гушев; 12.3, 12.4 – Кристиян Василев.